

# 多通道复信号检测中的几种常用复统计分布

刘维建<sup>1,2</sup>, 谢文冲<sup>2</sup>, 王永良<sup>2</sup>

(1. 国防科学技术大学电子科学与工程学院, 湖南长沙 410073; 2. 空军预警学院, 湖北武汉 430019)

**摘要:** 复随机变量的概率密度函数(PDF)及其累积分布函数(CDF)是复值信号检测中计算虚警概率(PFA)和检测概率(PD)的基础. 本文分析了复统计分布与实统计分布之间的关系, 推导了复  $F$  分布和复贝塔分布(中心或者非中心)的 PDF 和 CDF, 推导了中心复  $t$  分布的 PDF, 并且给出了部分应用实例.

**关键词:** 复随机变量; 累积分布函数; 复值信号检测; 概率密度函数; 自适应检测

**中图分类号:** TN957      **文献标识码:** A      **文章编号:** 0372-2112 (2013) 06-1238-04

**电子学报 URL:** <http://www.ejournal.org.cn>      **DOI:** 10.3969/j.issn.0372-2112.2013.06.031

## Some Complex Statistical Distributions in Multichannel Complex-Valued Signal Detection Theory

LIU Wei-jian<sup>1,2</sup>, XIE Wen-chong<sup>1</sup>, WANG Yong-liang<sup>2</sup>

(1. College of Electronic Science and Engineering, NUDT, Changsha, Hu'nan 410073, China;

2. Key Lab, Air Force Early Warning Academy, Wuhan, Hubei 430019, China)

**Abstract:** The probability density functions(PDF's) and cumulative distribution functions(CDF's) of complex random variables(RVA's) are basis for calculating the probabilities of false alarm(PFA's) and probabilities of detection(PD's) in complex-valued signal detection theory. In this paper, some relationship between the complex statistical distributions and the real ones is investigated. The PDF's and CDF's of the complex  $F$  and complex Beta distributions, both central and noncentral, and the PDF of the central complex  $t$  distribution are derived.

**Key words:** complex random variables; cumulative distribution function; complex-valued signal detection; probability density function; multichannel detection

## 1 引言

近年来,多通道复值信号检测受到越来越广泛的关注,它是无线通信、地震分析、超谱成像、雷达和声纳的基础内容之一<sup>[1,2]</sup>.文献[3~7]详细论述了复数域的信号处理技术,但是关于复随机变量或复随机向量的统计分布的文献较少.复统计分布均建立在复高斯分布的基础上,复高斯分布最早由 Wooding 引入<sup>[8]</sup>,后由 Goodman<sup>[9]</sup>进行了详尽的分析.从现有文献看来,与复数域信号检测有关的复统计分布的主要参考文献为 Kelly 的经典报告[10].但是文献[10]分析的几种复分布,除复卡方分布(Complex Chi-square Distribution)外,均不是常用的类型.

本文分析复信号检测中几种常用复统计分布,包括复卡方分布、复  $F$  分布(Complex  $F$ -Distribution)、复贝塔分布(Complex Beta Distribution)和复  $t$  分布(Complex  $t$ -

Distribution).并且研究了前三种复分布与相应的实分布之间的关系,推导了其概率密度函数(Probability Density Function, PDF)和累积分布函数(Cumulative Distribution Function, CDF).另外,从复  $t$  分布的定义出发,推导了其 PDF.

本研究内容可以广泛应用于机载雷达和声纳多通道信号检测等领域.

## 2 复随机变量与实随机变量的关系

复随机变量的 PDF 被定义为其实部与虚部的联合 PDF,即:若  $x \in \mathcal{C}^{1 \times 1}$ ,则  $x$  的 PDF 即为  $[x_R, x_I]^T$  的 PDF,其中,  $x_R$  和  $x_I$  分别为  $x$  的实部和虚部.若随机变量的实部和虚部的联合概率密度函数为正态分布,则称该随机变量为复正态随机变量<sup>[8,9]</sup>.该定义可以推广到复随机向量,即:复随机向量  $\mathbf{x}$  (其中  $\mathbf{x} \in \mathcal{C}^{N \times 1}$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R + j\mathbf{x}_I$ ) 的统计分布定义为  $\mathbf{y} = [\mathbf{x}_R^T, \mathbf{x}_I^T]^T$  的统计分布<sup>[11]</sup>.本文

仅分析规则(proper)随机向量,即随机向量满足下面两个关系式:  $E\{\mathbf{x}_R \mathbf{x}_I^T\} = -E\{\mathbf{x}_I \mathbf{x}_R^T\}$ ,  $E\{\mathbf{x}_R \mathbf{x}_R^T\} = E\{\mathbf{x}_I \mathbf{x}_I^T\}$ <sup>[6,7]</sup>. 下面给出复卡方分布、复  $F$  分布、复贝塔分布和复  $t$  分布的定义. 其中,复卡方分布已在文献[10]中给出,但为方便分析,本文一并给出.

**定义 1** 设  $\mathbf{x}$  为多元复正态分布,其自由度(Degrees Of Freedom, DOF)、均值和协方差矩阵分别为  $N$ 、 $\boldsymbol{\mu}$  和  $\mathbf{I}_N$ , 记作  $\mathbf{x} \sim \mathcal{CN}_N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_N)$ , 则  $y = \mathbf{x}^H \mathbf{x}$  称为非中心复卡方分布,其自由度为  $N$ ,非中心参数为  $\rho = \boldsymbol{\mu}^H \boldsymbol{\mu}$ , 记作  $y \sim \mathcal{C}\chi_N^2(\rho)$ . 当  $\rho = 0$  时,  $y$  称为中心复卡方随机变量, 记作  $y \sim \mathcal{C}\chi_N^2$ .

**定义 2\*** 设  $y_1 \sim \mathcal{C}\chi_M^2(\rho)$ ,  $y_2 \sim \mathcal{C}\chi_N^2$ ,  $y_1$  和  $y_2$  统计独立, 则  $f = (y_1/M)/(y_2/N)$  称为非中心复  $F$  分布,其自由度为  $M$  和  $N$ ,非中心参数为  $\rho$ , 记作  $f \sim \mathcal{C}\beta_{M,N}(\rho)$ . 当  $\rho = 0$  时,  $f$  称为自由度为  $M$  和  $N$  的中心复  $F$  分布, 记作  $f \sim \mathcal{C}\beta_{M,N}$ .

**定义 3\*** 设  $y_1 \sim \mathcal{C}\chi_M^2(\rho)$ ,  $y_2 \sim \mathcal{C}\chi_N^2$ ,  $y_1$  与  $y_2$  统计独立, 则  $b = y_1/(y_1 + y_2)$  称为非中心复贝塔分布,其自由度为  $M$  和  $N$ ,非中心参数为  $\rho$ , 记作  $b \sim \mathcal{C}\beta_{M,N}(\rho)$ . 当  $\rho = 0$  时,  $b$  称为自由度为  $M$  和  $N$  的中心复贝塔分布, 记作  $b \sim \mathcal{C}\beta_{M,N}$ .

**定义 4** 设  $x \sim \mathcal{CN}_1(\mu, 1)$ ,  $y \sim \mathcal{C}\chi_N^2(\rho)$ ,  $x$  与  $y$  统计独立, 则  $t = x/\sqrt{y/N}$  称为非中心复  $t$  分布,其自由度为  $N$ ,非中心参数为  $\mu$ , 记作  $t \sim \mathcal{C}t_N(\mu)$ . 当  $\mu = 0$  时,  $t$  称为自由度为  $N$  的中心复  $t$  分布, 记作  $t \sim \mathcal{C}t_N$ .

下面分析复统计分布与相应实统计分布之间的关系,并给出四个重要的定理和三个引理,其中引理 3 在文献[12]中给出了证明,为了行文的流畅性,这里一并给出.

**引理 1** 设  $x \sim \mathcal{CN}_N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_N)$ ,  $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T$ ,  $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N]^T$ ,  $x_n = x_n^R + j \cdot x_n^I$ ,  $\mu_n = \mu_n^R + j \cdot \mu_n^I$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ , 则  $x_n^R \sim N_1(\mu_n^R, \frac{1}{2})$ ,  $x_n^I \sim N_1(\mu_n^I, \frac{1}{2})$ .

**证明**  $x \sim \mathcal{CN}_N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_N)$ , 所以  $x_n^R$  和  $x_n^I$  的均值为  $\mu_n^R$  和  $\mu_n^I$ . 并且  $\text{var}(x_n) = E\{(x_n - \mu_n)(x_n - \mu_n)^*\} = \text{var}(x_n^R) + \text{var}(x_n^I) = 1$ . 根据  $x$  的规则(propriety)特性得:  $\text{var}(x_n^R) = \text{var}(x_n^I)$ , 所以  $\text{var}(x_n^R) = \text{var}(x_n^I) = \frac{1}{2}$ . 证毕□

**引理 2** 令  $x \sim \mathcal{CN}_N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_N)$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R + j \cdot \mathbf{x}_I$ ,  $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_R + j \cdot \boldsymbol{\mu}_I$ , 则  $\sqrt{2}\mathbf{x}_R \sim N_N(\sqrt{2}\boldsymbol{\mu}_R, \mathbf{I}_N)$ ,  $\sqrt{2}\mathbf{x}_I \sim N_N(\sqrt{2}\boldsymbol{\mu}_I, \mathbf{I}_N)$ , 符号“ $\mathcal{N}$ ”表示实高斯分布.

**证明** 根据引理 1 即可验证. 证毕□

**定理 1** 设  $\mathcal{N}_N(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{I}_N)$  表示多元正态分布,其维数、均值和方差分别为  $N$ 、 $\boldsymbol{\xi}$  和  $\mathbf{I}_N$ . 则  $\sqrt{2}\mathcal{CN}_N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_N) \stackrel{d}{=} \mathcal{N}_{2N}(\sqrt{2}\boldsymbol{\xi}, \mathbf{I}_{2N})$ , 符号“ $\stackrel{d}{=}$ ”表示“在统计意义上相等”,其中,

$$\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_R + j \cdot \boldsymbol{\mu}_I, \boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\mu}_R^T, \boldsymbol{\mu}_I^T]^T.$$

**证明** 令  $\mathbf{x} \sim \mathcal{CN}_N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_N)$ ,  $\mathbf{z} = \sqrt{2}\mathbf{x}$ , 则  $\mathbf{z} \sim \mathcal{CN}_N(\sqrt{2}\boldsymbol{\mu}, 2\mathbf{I}_N)$ . 所以  $\mathbf{z}$  的 PDF 为

$$f(\mathbf{z}) = 1/(2\pi)^N \exp\left(-(\mathbf{z} - \sqrt{2}\boldsymbol{\mu})^H(\mathbf{z} - \sqrt{2}\boldsymbol{\mu})/2\right) \quad (1)$$

上式可以表示为

$$f(\mathbf{z}) = \frac{1}{(2\pi)^{2N/2}} \exp\left(-\frac{(\mathbf{y} - \sqrt{2}\boldsymbol{\xi})^H(\mathbf{y} - \sqrt{2}\boldsymbol{\xi})}{2}\right) \triangleq f(\mathbf{y}) \quad (2)$$

其中  $\mathbf{y} = [\mathbf{z}_R^T, \mathbf{z}_I^T]^T = \sqrt{2}[\mathbf{x}_R^T, \mathbf{x}_I^T]^T$ ,  $\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{\mu}_R^T, \boldsymbol{\mu}_I^T]^T$ . 所以,  $\mathbf{y} \sim \mathcal{N}_{2N}(\sqrt{2}\boldsymbol{\xi}, \mathbf{I}_{2N})$ . 证毕□

**引理 3** 设  $y_1 \sim \chi_{N_1}^2(\rho_1)$ ,  $y_2 \sim \chi_{N_2}^2(\rho_2)$ , 则  $y_1 + y_2 \sim \chi_{N_1+N_2}^2(\rho_1 + \rho_2)$ , 其中,  $\chi_N^2(\rho)$  表示自由度为  $N$ ,非中心参数为  $\rho$  的实卡方分布.

**证明** 见文献[12]. 证毕□

**定理 2**  $2\mathcal{C}\chi_N^2(\rho) \stackrel{d}{=} \chi_{2N}^2(2\rho)$ .

**证明** 令  $x \sim \mathcal{CN}_N(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{I}_N)$ , 则  $y = \mathbf{x}^H \mathbf{x} \sim \mathcal{C}\chi_N^2(\rho)$ , 其中,  $\rho = \boldsymbol{\mu}^H \boldsymbol{\mu}$ . 令  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_R + j \cdot \mathbf{x}_I$ ,  $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\mu}_R + j \cdot \boldsymbol{\mu}_I$ , 则  $2\mathbf{x}^H \mathbf{x} = (\sqrt{2}\mathbf{x}_R)^T(\sqrt{2}\mathbf{x}_R) + (\sqrt{2}\mathbf{x}_I)^T(\sqrt{2}\mathbf{x}_I)$ . 由定理 1:  $\sqrt{2}\mathbf{x}_R \sim \mathcal{N}_N(\sqrt{2}\boldsymbol{\mu}_R, \mathbf{I}_N)$ ,  $\sqrt{2}\mathbf{x}_I \sim \mathcal{N}_N(\sqrt{2}\boldsymbol{\mu}_I, \mathbf{I}_N)$ . 再根据引理 3 得,  $2y \sim \chi_{2N}^2(2\rho)$ . 证毕□

**定理 3**  $\mathcal{C}\mathcal{F}_{M,N}(\rho) \stackrel{d}{=} \mathcal{F}_{2M,2N}(2\rho)$ , 其中,  $\mathcal{F}_{M,N}(\rho)$  表示自由度为  $M$  和  $N$ ,非中心参数为  $\rho$  的非中心实  $F$  分布.

**证明** 令  $y_1 \sim \mathcal{C}\chi_M^2(\rho)$ ,  $y_2 \sim \mathcal{C}\chi_N^2$ , 则  $f = (y_1/M)/(y_2/N) \sim \mathcal{C}\mathcal{F}_{M,N}(\rho)$ . 根据定理 2 得,  $2y_1 \sim \chi_{2M}^2(2\rho)$ ,  $2y_2 \sim \chi_{2N}^2$ . 因此,  $f \stackrel{d}{=} (\chi_{2M}^2(2\rho)/2M)/(\chi_{2N}^2/2N) \stackrel{d}{=} \mathcal{F}_{2M,2N}(2\rho)$ . 证毕□

**定理 4**  $\mathcal{C}\beta_{M,N}(\rho) \stackrel{d}{=} \beta_{2M,2N}(2\rho)$ , 其中,  $\beta_{M,N}(\rho)$  表示自由度为  $M$  和  $N$ ,非中心参数为  $\rho$  的非中心实贝塔分布.

**证明** 设  $y_1 \sim \mathcal{C}\chi_M^2(\rho)$ ,  $y_2 \sim \mathcal{C}\chi_N^2$ , 则  $b = y_1/(y_1 + y_2) \sim \mathcal{C}\beta_{M,N}(\rho)$ . 根据定理 2 得,  $b \stackrel{d}{=} \chi_{2M}^2(2\rho)/(\chi_{2M}^2(2\rho) + \chi_{2N}^2) \stackrel{d}{=} \beta_{2M,2N}(2\rho)$ . 证毕□

### 3 复随机变量的 PDF 和 CDF

本节基于上文复统计分布与实统计分布之间的关系推导复卡方分布、复  $F$  分布和复贝塔分布的 PDF 和 CDF,并从复  $t$  分布的定义出发,推导其 PDF.

\* 在文献[10]中复  $F$  分布被定义为:  $f = y_1/y_2$

\*\* 在文献[10]中,非中心复贝塔分布被定义为:  $b = \mathcal{C}\chi_M^2/(\mathcal{C}\chi_M^2 + \mathcal{C}\chi_N^2(P))$

### 3.1 复卡方分布

令  $z \sim \chi_{2N}^2(2\rho)$ , 则  $z$  的 PDF 为<sup>[13]</sup>

$$f_{\chi_{2N}^2(2\rho)}(z) = \frac{e^{-z/2 - \rho z^{N-1}}}{2^N (N-1)!} {}_0F_1(N; \frac{1}{2}\rho z) \quad (3)$$

其中,  ${}_0F_1(\cdot; \cdot)$  为广义超几何函数 (Generalized Hypergeometric Function)<sup>[14,15]</sup>.

令  $x = z/2$ , 根据定理 2,  $x \sim \mathcal{C}\chi_N^2(\rho)$ . 利用变量代换得到  $x$  的 PDF 为

$$f_{\mathcal{C}\chi_N^2(\rho)}(x) = \frac{e^{-x - \rho x^{N-1}}}{(N-1)!} {}_0F_1(N; \rho x) \quad (4)$$

根据等式  ${}_0F_1(N; \rho x) = \frac{(N-1)!}{(\rho x)^{(N-1)/2}} I_{N-1}(2\sqrt{\rho x})$ <sup>[10]</sup>, 式(4)可以重写为

$$f_{\mathcal{C}\chi_N^2(\rho)}(x) = e^{-x - \rho(x/\rho)^{(N-1)/2}} I_{N-1}(2\sqrt{\rho x}) \quad (5)$$

其中,  $I_N(\cdot)$  为第一类修正贝塞尔函数<sup>[14]</sup>.

因此, 式(4)和式(5)是非中心复卡方分布的两个等价的 PDF.

当  $\rho = 0$ , 得到中心复卡方分布的 PDF:

$$f_{\mathcal{C}\chi_N^2}(x) = \frac{e^{-x} x^{N-1}}{(N-1)!} \quad (6)$$

把式(6)代入式(4), 得到:

$$f_{\mathcal{C}\chi_N^2(\rho)}(x) = f_{\mathcal{C}\chi_N^2}(x) e^{-\rho} {}_0F_1(N; \rho x) \quad (7)$$

式(4)可以展开为:

$$f_{\mathcal{C}\chi_N^2(\rho)}(x) = e^{-\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k e^{-x} x^{N+k-1}}{(N+k-1)! \cdot k!} \quad (8)$$

因此,  $\mathcal{C}\chi_N^2(\rho)$  的 CDF 为

$$F_{\mathcal{C}\chi_N^2(\rho)}(x) = e^{-\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \gamma(x, N+k) \quad (9)$$

其中,  $\gamma(x, N+k) = \int_0^x e^{-t} t^{N+k-1} dt / \Gamma(N+k)$  为不完全伽马函数<sup>[14,15]</sup>,  $\Gamma(\cdot)$  为伽马函数, 表达式为:  $\Gamma(z)$

$$= \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

容易验证当  $\rho = 0$  时  $\mathcal{C}\chi_N^2$  的 CDF 为:

$$F_{\mathcal{C}\chi_N^2}(x) = \gamma(x, N) \quad (10)$$

### 3.2 复 F 分布

令  $f \sim \mathcal{C}\mathcal{F}_{M,N}(\rho)$ , 根据定理 3 得,  $f \sim \mathcal{C}\mathcal{F}_{2M,2N}(2\rho)$ .

由非中心实 F 分布的 PDF<sup>[15]</sup> 得到  $f$  的 PDF 为

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{C}\mathcal{F}_{M,N}(\rho)}(f) &= e^{-\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} \frac{(M+N+k-1)!}{(M+k-1)! (N-1)!} \left(\frac{M}{N}\right)^{M+k} \\ &\quad \cdot \frac{f^{M+k-1}}{\left(1 + \frac{Mf}{N}\right)^{M+N+k}} \\ &= \frac{M^M N^N}{B(M,N) (N+Mf)^{M+N}} e^{-\rho} \\ &\quad {}_1F_1\left(M+N, M; \frac{Mof}{Mf+N}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

当  $\rho = 0$  时, 中心复 F 分布的 PDF 为

$$f_{\mathcal{C}\mathcal{F}_{M,N}}(f) = \frac{M^M N^N}{B(M,N) (N+Mf)^{M+N}} f^{M-1} \quad (12)$$

其中,  $B(\cdot, \cdot)$  为贝塔函数, 即:  $B(M, N) = \frac{(M-1)! (N-1)!}{(M+N-1)!}$ <sup>[14]</sup>.

另外, 把式(12)代入式(11)得到:

$$f_{\mathcal{C}\mathcal{F}_{M,N}(\rho)}(f) = f_{\mathcal{C}\mathcal{F}_{M,N}}(f) e^{-\rho} {}_1F_1(M+N, M; \frac{M}{N}\rho) \quad (13)$$

根据式(11)的第一个等式得到, 的 CDF 为:

$$F_{\mathcal{C}\mathcal{F}_{M,N}(\rho)}(x) = e^{-\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} B_q(M+k, N) \quad (14)$$

其中,  $B_x(M+k, N) = \int_0^x t^{M+k-1} (1-t)^{N-1} dt / B(M+k, N)$  为不完全贝塔函数<sup>[14,15]</sup>, 且  $q = Mx / (N + Mx)$ .

当  $\rho = 0$  时,  $\mathcal{C}\mathcal{F}_{M,N}$  的 CDF 为:

$$F_{\mathcal{C}\mathcal{F}_{M,N}}(x) = B_q(M, N) \quad (15)$$

利用变量代换, 根据式(12)或式(13)可得到文献[10]中的复 F 分布的 PDF.

### 3.3 复贝塔分布

令  $b \sim \mathcal{C}\beta_{M,N}(\rho)$ , 则根据定理 4,  $b \sim \beta_{2M,2N}(2\rho)$ . 根据非中心实贝塔分布的 PDF<sup>[15]</sup>, 可得到  $b$  的 PDF 为

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{C}\beta_{M,N}(\rho)}(b) &= e^{-\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k b^{M+k-1} (1-b)^{N-1}}{k! B(M+k, N)} \\ &= \frac{b^{M-1} (1-b)^{N-1}}{B(M, N)} e^{-\rho} {}_1F_1(M+N, M; \rho b) \end{aligned} \quad (16)$$

当  $\rho = 0$  时,  $\mathcal{C}\beta_{M,N}$  的 PDF 为:

$$f_{\mathcal{C}\beta_{M,N}}(b) = \frac{b^{M-1} (1-b)^{N-1}}{B(M, N)} \quad (17)$$

把式(17)代入式(16)得到:

$$f_{\mathcal{C}\beta_{M,N}(\rho)}(b) = f_{\mathcal{C}\beta_{M,N}}(b) e^{-\rho} {}_1F_1(M+N, M; \rho b) \quad (18)$$

利用式(16)中的第一个等式, 得到  $\mathcal{C}\beta_{M,N}(\rho)$  的 CDF 为:

$$F_{\mathcal{C}\beta_{M,N}(\rho)}(x) = e^{-\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\rho^k}{k!} B_x(M+k, N) \quad (19)$$

当  $\rho = 0$  时,  $\mathcal{C}\beta_{M,N}$  的 CDF 为:

$$F_{\mathcal{C}\beta_{M,N}}(x) = B_x(M, N) \quad (20)$$

值得说明的是,  $\mathcal{C}\beta_{M,N}(\rho)$  ( $\mathcal{C}\beta_{M,N}$ ) 的 CDF 与  $\mathcal{C}\mathcal{F}_{M,N}(\rho)$  ( $\mathcal{C}\mathcal{F}_{M,N}$ ) 的 CDF 具有相同的形式.

### 3.4 复 t 分布

设  $x \sim \mathcal{C}\mathcal{N}_1(\mu, 1)$ ,  $y \sim \mathcal{C}\chi_N^2$ ,  $x$  与  $y$  统计独立. 令  $t = x / \sqrt{y/N}$ ,  $u = y$ , 则  $x$  和  $y$  的联合 PDF 为:

$$f(x, y) = \frac{1}{\pi} e^{-|x-\mu|^2} \frac{e^{-y} y^{N-1}}{(N-1)!} \quad (21)$$

可以验证, 雅克比为  $|\partial(t, u) / \partial(x, y)| = \sqrt{N/y}$ ,

因此

$$\begin{aligned} f(t, u) &= \frac{\sqrt{u/N}}{\pi(N-1)!} e^{-|\sqrt{u/N}t - \mu|^2} e^{-u} u^{N-1} \\ &= \frac{e^{-|\mu|^2}}{\sqrt{N(N-1)!} \pi} e^{-\left(1 + |t|^2/N + 1\right) u} u^{N-1/2} e^{2\operatorname{Re}\{\mu^* t\} \sqrt{\frac{u}{N}}} \\ &= \frac{e^{-|\mu|^2}}{\sqrt{N(N-1)!} \pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\operatorname{Re}\{\mu^* t\})^k}{k! N^{k/2}} u^{\frac{2N+k-1}{2}} e^{-\left(1 + \frac{|t|^2}{N}\right) u} \quad (22) \end{aligned}$$

令  $v = (1 + |t|^2/N)u$ , 则  $|\partial u / \partial v| = (1 + |t|^2/N)^{-1}$ . 所以

$$\begin{aligned} f(t, v) &= \frac{e^{-|\mu|^2}}{\sqrt{N(N-1)!} \pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\operatorname{Re}\{\mu^* t\})^k}{k! N^{k/2}} \\ &\quad \left( \frac{v}{1 + \frac{|t|^2}{N}} \right)^{\frac{2N+k-1}{2}} \cdot e^{-v} \frac{1}{1 + |t|^2/N} \\ &= \frac{e^{-|\mu|^2} v^{\frac{2N-1}{2}}}{\sqrt{N(N-1)!} \pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2\operatorname{Re}\{\mu^* t\})^k}{k! N^{k/2}} \\ &\quad \left( 1 + \frac{|t|^2}{N} \right)^{-\frac{2N+k-1}{2}} e^{-v} v^{\frac{k}{2}} \quad (23) \end{aligned}$$

对上式求关于  $v$  的积分, 得到  $t$  的 PDF:

$$\begin{aligned} f_{\alpha_N(\mu)}(t) &= \int_0^{\infty} f(t, v) dv = \frac{\pi^{-1} e^{-|\mu|^2}}{\sqrt{N(N-1)!} \pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}^k\{\mu^* t\}}{2^k k! N^{k/2}} \\ &\quad \cdot \left( 1 + \frac{|t|^2}{N} \right)^{-\frac{2N+k-1}{2}} \Gamma\left(\frac{2N+k+1}{2}\right) \quad (24) \end{aligned}$$

其中,  $\Gamma(\cdot)$  为上文所述的伽马函数.

令  $\mu = 0$ , 则可得到中心复  $t$  分布的 CDF:

$$\begin{aligned} f_{\alpha_N}(t) &= \frac{1}{\sqrt{N(N-1)!} \pi} (1 + |t|^2/N)^{-\frac{(2N+1)}{2}} \Gamma\left(\frac{2N+1}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{N\pi} B\left(\frac{1}{2}, N\right)} (1 + |t|^2/N)^{-(2N+1)/2} \quad (25) \end{aligned}$$

## 4 结论

复卡方分布、复  $F$  分布和复贝塔分布与相应的实分布有一一对应关系, 而复  $t$  分布并没有这种特性. 本文分析了多通道复值信号检测中的几个常用的复统计分布, 得到了相应的概率密度函数和积累分布函数. 这为多通道复值信号检测的研究打下了理论基础.

## 参考文献

- [1] 简涛, 何友, 苏峰, 长文, 平殿发. 距离扩展目标检测器的最优参数及鲁棒性分析[J]. 电子学报, 2011, 39(9): 2090 - 2193.  
Jian Tao, He You, Su Feng, Qu Changwen, Ping Dianfa. Optimized parameters and robustness evaluation for range spread target detector[J]. Acta Electronica Sinica, 2011, 39(9): 2090 - 2193. (in Chinese)
- [2] 王鞠庭, 江胜利, 何劲, 刘中. 基于对角加载的机载 MIMO 雷达 GLRT 检测器[J]. 电子学报, 2009, 37(12): 2614 -

2619.

Wang Juting, Jiang Shengli, He Jin, Liu Zhong, GLRT detector with diagonal loading for MIMO radars[J]. Acta Electronica Sinica, 2009, 37(12): 2614 - 2619. (in Chinese)

- [3] Mandic D P, Goh V S L. Complex Valued Nonlinear Adaptive Filters: Noncircularity, Widely Linear and Neural Models[M]. Chichester: Wiley, 2009.
- [4] Hjrungnes A. Complex-Valued Matrix Derivatives: With Applications in Signal Processing and Communications[M]. New York: Cambridge University Press, 2011.
- [5] Vaidyanathan P P, Phoong S, Lin Y. Signal Processing and Optimization for Transceiver Systems[M]. New York: Cambridge University Press, 2010.
- [6] Adali T, Haykin S. Adaptive Signal Processing, Next-Generation Solutions[M]. Hoboken: Wiley-IEEE Press, 2010.
- [7] Schreier P J, Scharf L L. Statistical Signal Processing of Complex-Valued Data: the Theory of Improper and Noncircular Signals[M]. New York: Cambridge University Press, 2010.
- [8] Wooding R A. The multivariate distribution of complex normal variables[J]. Biometrika, 1956, 43(1/2): 212 - 215.
- [9] Goodman N R. Statistical analysis based on a certain multivariate complex Gaussian distribution (an introduction) [J]. The Annals of Mathematical Statistics, 1963, 34(1): 152 - 177.
- [10] Kelly E J, Forsythe K M. Adaptive Detection and Parameter Estimation for Multidimensional Signal Models[R]. Lexington: Lincoln Lab, 1989.
- [11] Picinbono B. Second-order complex random vectors and normal distributions[J]. IEEE Transactions on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1996, 44(10): 2637 - 2640.
- [12] Pal N, Jin C, Lim W K. Handbook of Exponential and Related Distributions for Engineers and Scientists[M]. London: Chapman & Hall/CRC, 2006.
- [13] Muirhead R J. Aspects of Multivariate Statistical Theory[M]. 2nd ed. Hoboken: Wiley, 2005.
- [14] Press W H, Teukolsky S A, Vetterling W T, et al. Numerical Recipes: the Art of Scientific Computing[M]. Third ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [15] Walck C, Fysikum. Hand-book on Statistical Distributions for Experimentalists[R]. Sweden: Stockholm University, 2007.

## 作者简介



刘维建 男, 1982 年 12 月出生于山东省莱芜市. 现为国防科技大学信号与信息处理专业博士研究生. 主要研究方向: 空时自适应检测、阵列信号处理.

E-mail: liuwjian@163.com